

# Developpez.com – défi # 5

## Démonstration demandée par la question 4.1 de l'énoncé du défi

### Sommaire

1. Introduction.....	1
2. Diverses notations.....	2
3. Propriétés utiles pour la suite.....	3
3.1. Une symétrie plane remarquable.....	4
3.2. Placements possibles pour les pièces A, B et P.....	4
4. Cas particulier de la pièce Z.....	5
4.1. Zone de placements possibles de Z sur les colonnes 1, 2 et 3 de la figure W.....	5
4.2. Zone de placements possibles de Z sur les colonnes 3, 4 et 5 de la figure W.....	10
5. Conclusion.....	11

### 1. Introduction

La présente démonstration n'est pas une démonstration au sens "mathématique" du terme. Par contre, l'intégralité de ses étapes pourrait être reprise pour mettre en place une véritable démonstration mathématique, fondée sur une méthode analytique, à défaut de trouver une autre méthode de démonstration plus élégante.

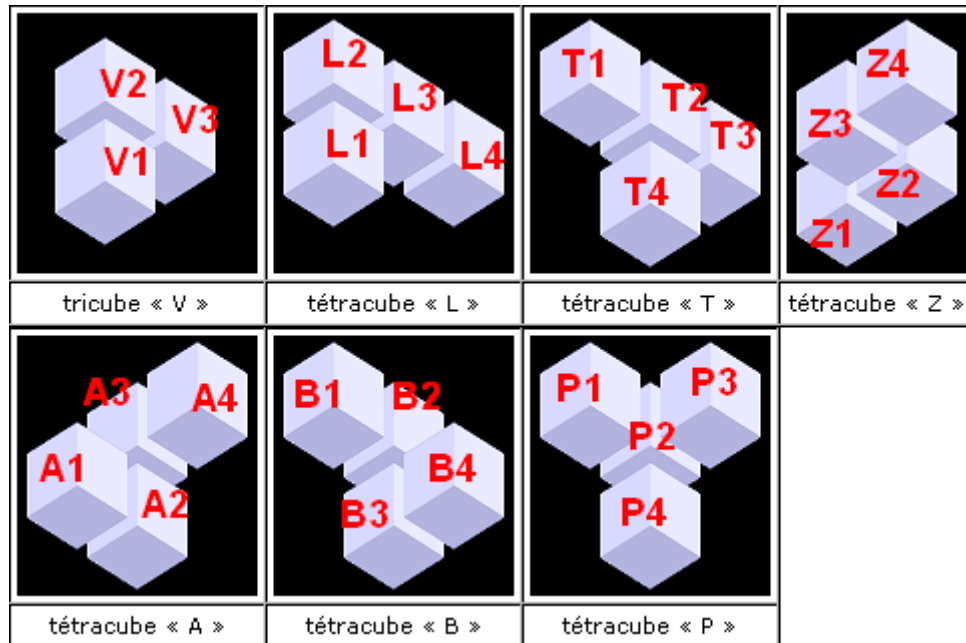
Mon texte s'accompagne de dessins qui m'ont semblé nécessaires pour aider à la compréhension. Cependant, je rassure le jury : je n'ai pas utilisé de logiciel de "PAO". J'ai juste utilisé le bon vieux Paint de Windows.

Le principe général va consister à démontrer certaines propriétés sur la figure à étudier et ses rapports avec les pièces du puzzle. Connaissant ces propriétés, je vais ensuite montrer que quelle que soit la position que l'on donne à la pièce "Z" du puzzle, on va se trouver dans l'impossibilité de construire la figure demandée.

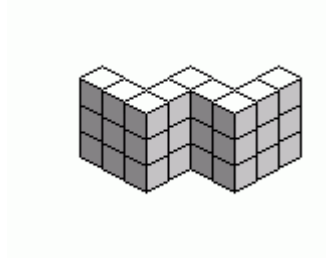
*Cette démonstration m'a probablement pris plus de temps que la réalisation de l'appliquet demandé dans l'énoncé du défi.. Je n'ai donc pas eu assez de temps pour qu'elle soit complète. J'ai surligné en jaune dans mon texte les résultats intermédiaires que je n'ai pas eu le temps de démontrer.*

## 2. Diverses notations

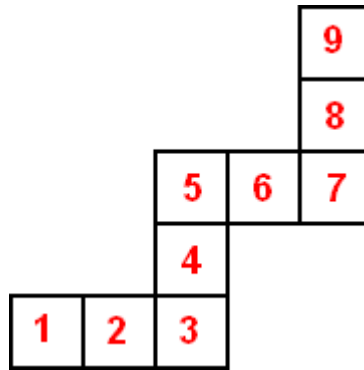
Concernant les pièces du puzzle, nous reprendrons les noms V, L, T, Z, A, B et P tels que présentés dans l'énoncé du défi. Nous donnerons aussi des noms aux cubes composants ces pièces afin de pouvoir décrire des tentatives de positionnement de ces cubes :



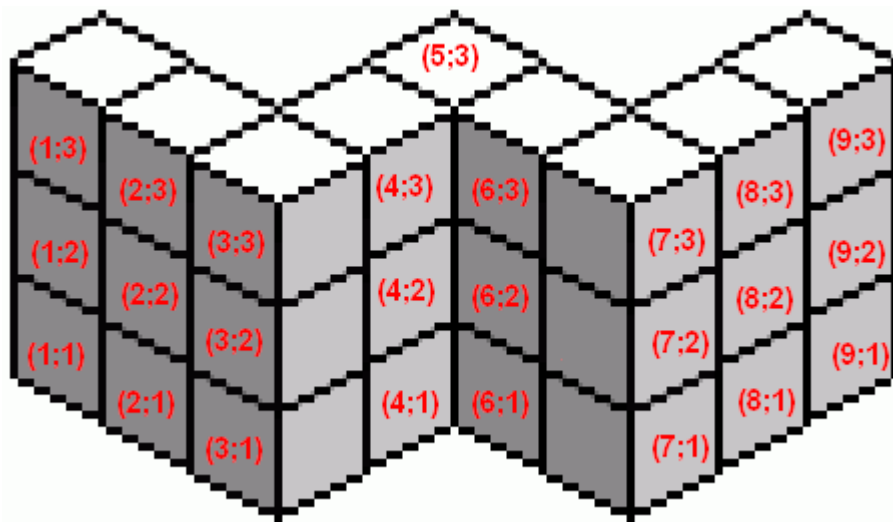
Nous nommerons W la forme à étudier (puisque sa base a la forme d'un W).



Plutôt que de nous placer dans un système de coordonnées cartésiennes, nous allons définir un système d'identification des cubes composants la figure W. Nous représenterons chaque cube de W par un couple d'entiers de l'ensemble  $\llbracket 1; 9 \rrbracket \times \llbracket 1; 3 \rrbracket$  où le second entier représente "l'étage" du cube dans la figure W (qui est composée de trois étages) et le premier entier désigne la "colonne" d'emplacement du cube grâce à la numérotation suivante sur la base de W :



Avec une vue 3D, voici ce que donne le système de coordonnées introduit :



Grâce aux notations que nous venons d'introduire, trouver une construction de  $W$  avec les sept pièces du cube de Soma reviendrait à trouver un *placement* des sept pièces du puzzle à l'intérieur de la figure  $W$  (i.e. un couple de  $\llbracket 1;9 \rrbracket \times \llbracket 1;3 \rrbracket$  pour chacun des cubes de chacune des sept pièces). Je vais donc devoir montrer par l'absurde qu'il ne peut pas exister de tel placement.

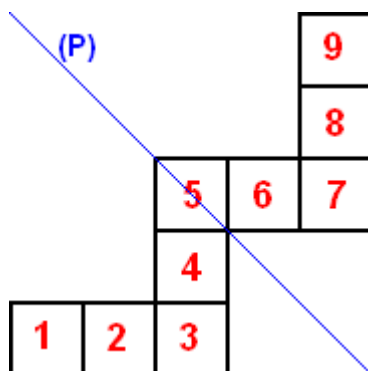
Considérons enfin l'ensemble  $I$  des isométries de l'espace permettant d'obtenir des placements pour chacune des pièces du puzzle dans la figure  $W$ . Il s'agit de compositions entre des translations de long des arêtes des cubes de  $W$  et des rotations d'angle  $\pi/2$  par rapport aux axes constitués par les arêtes des cubes de  $W$ . On remarquera que ces isométries ont pour conséquence que chaque face des sept pièces du puzzle est soit parallèle, soit orthogonale au plan de la base de la figure  $W$ .

### 3. Propriétés utiles pour la suite

Maintenant que nous avons nommé les éléments, intéressons-nous à quelques propriétés de la figure  $W$ , ainsi qu'à certaines contraintes de placement évidentes concernant trois des sept pièces.

### 3.1. Une symétrie plane remarquable

Considérons le plan  $(P)$  orthogonal à la base de la figure W et contenant la diagonale du carré de la base de la colonne 5 passant par l'intersection des carrés des bases des colonnes 5 et 6 :



**Le plan  $(P)$  est une symétrie plane laissant la figure W invariante.** En effet, par la symétrie de plan  $(P)$ , on a les correspondances suivantes entre les colonnes :

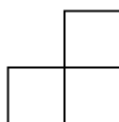
- $1 \rightarrow 9$  (et donc  $9 \rightarrow 1$ )
- $2 \rightarrow 8$  (et donc  $8 \rightarrow 2$ )
- $3 \rightarrow 7$  (et donc  $7 \rightarrow 3$ )
- $4 \rightarrow 6$  (et donc  $6 \rightarrow 4$ )
- $5 \rightarrow 5$ .

Puisque pour chaque colonne W, il correspond une colonne de W et une seule par la symétrie de plan  $(P)$ , l'image de W par cette symétrie est bien W. Donc la symétrie de plan  $(P)$  laisse bien W invariante.

Grâce à cette symétrie, les raisonnements que nous pourrons faire sur les colonnes 1, 2 3, 4 et 5 seront aussi valables pour les colonnes 5, 6, 7, 8 et 9. Ceci nous permettra de diviser par deux le nombre de cas de placements de pièces du puzzle à étudier.

### 3.2. Placements possibles pour les pièces A, B et P

Les pièces A, B et P présentent un aspect intéressant car si on veut les placer à l'intérieur de la figure W, **elles devront toujours avoir chacune au moins un cube contenu dans l'une des colonnes 3, 5 et 6.** En effet, lorsqu'elles sont placées à l'intérieur de la figure W, leurs projections orthogonales sur le plan de base de la figure sont constituées de trois carrés ayant deux à deux un côté commun et ayant tous les trois un unique point commun :



Autrement dit, si on projette orthogonalement un placement d'une des pièces A, B et P sur le plan de la base de W, on obtient une figure isométrique à l'une des trois figures suivantes :

- L'union des trois carrés constituant les bases des colonnes 2, 3 et 4
- L'union des trois carrés constituant les bases des colonnes 4, 5 et 6
- L'union des trois carrés constituant les bases des colonnes 6, 7 et 8.

Grâce à la symétrie évoquée au paragraphe 3.1, nous n'aurons qu'à nous intéresser aux possibilités

de placements des pièces A, B et P uniquement par rapport aux colonnes 3 et 5.

## 4. Cas particulier de la pièce Z

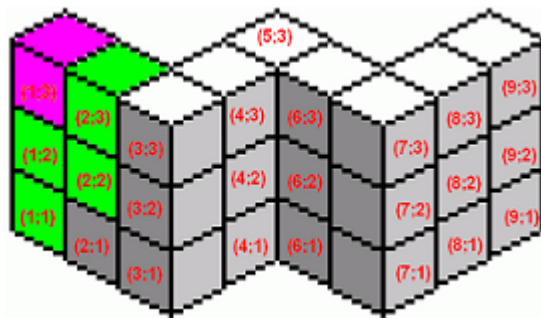
Nous allons maintenant nous intéresser à toutes les possibilités de placement de la pièce Z à l'intérieur de la figure W pour constater que chacun des placements de Z conduit à un échec de construction de la figure W.

Grâce à la symétrie évoquée au paragraphe 3.1, nous n'aurons que deux zones de placement possible de la pièce Z à étudier.

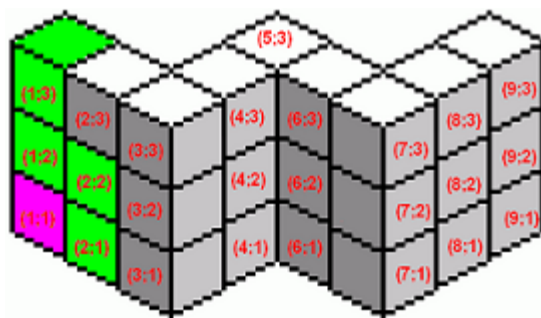
### 4.1. Zone de placements possibles de Z sur les colonnes 1, 2 et 3 de la figure W

Commençons par exclure les cas de placements incorrects de la figure Z les plus évidents : dans la zone constituée des colonnes 1, 2 et 3 de la figure W.

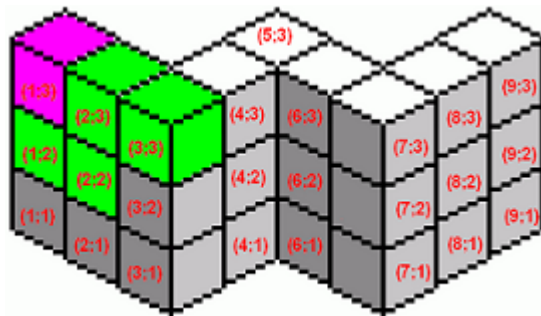
- Cubes Z1 et Z2 placés en (1; 1) et (1; 2). Le cube de coordonnées (1; 3) s'en trouve "isolé" et il n'est plus possible de placer d'autres pièces passant par ce cube :



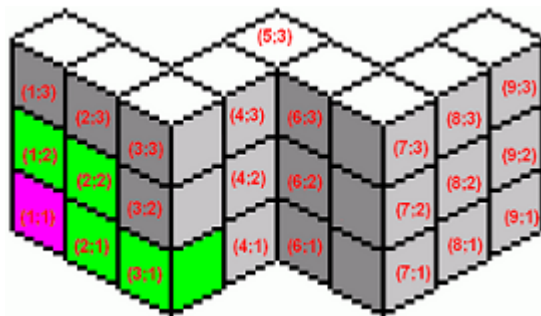
- Cubes Z1 et Z2 placés en (2; 1) et (2; 2). Le cube de coordonnées (1; 1) s'en trouve "isolé" et il n'est plus possible de placer d'autres pièces passant par ce cube :



- Cubes Z1, Z2 et Z3 placés respectivement en (1; 2), (2; 2) et (2; 3). Le cube de coordonnées (1; 3) s'en trouve "isolé" et il n'est plus possible de placer d'autres pièces par ce cube :

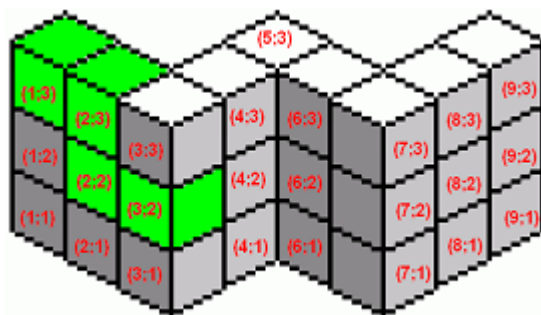


- Cubes Z1, Z2 et Z3 placés respectivement en (1; 2), (2; 2) et (2; 1). Le cube de coordonnées (1; 1) s'en trouve "isolé" et il n'est plus possible de placer d'autres pièces par ce cube :

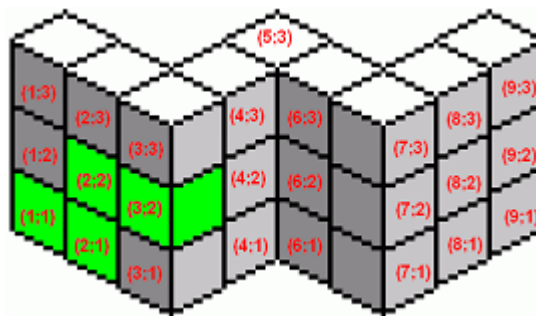


Il ne reste donc que deux possibilités de placement de la pièce Z dans la partie de W constituée des colonnes 1, 2 et 3.

- **Cas "1"** : cubes Z1, Z2 et Z3 placés respectivement en (1; 3), (2; 3) et (2; 2). Ce cas rend possible le placement des pièces V et L en (1; 2), (1; 1) et (3; 1) :



- **Cas "2"** : cubes Z1, Z2 et Z3 placés respectivement en (1; 1), (2; 1) et (2; 2). Ce cas rend possible le placement des pièces V et L en (1; 2), (1; 3) et (2; 3) :



On remarque que les deux cas qui viennent d'être cités présentent une symétrie par rapport au plan parallèle à la base de la figure W et passant par la mi-hauteur des colonnes de W. Nous n'aurons donc besoin que d'étudier le cas "1", le cas "2" produisant les mêmes résultats par symétrie.

**La figure Z étant placée conformément au cas "1", quelles possibilités de placement reste-t-il pour les pièces A, B et P ?**

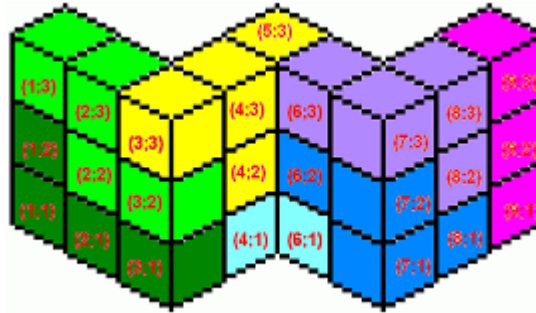
Nous avons vu au paragraphe 3.2 que seules les colonnes 3, 5 et 7 permettent de placer les pièces A, B et P. On constate déjà qu'on ne peut placer aucune de ces trois pièces sur la colonne 3 à cause de la position de Z car ces pièces ont besoin d'au moins deux "étages" de la figure W pour pouvoir être placées. Elles ne peuvent donc être placées que sur les colonnes 5 et 7.

De plus, sur la colonne 5 ou 7, on ne peut placer au plus que deux pièces prises parmi A, B et P. En effet, ces trois pièces ont toutes une hauteur de deux cubes. Du fait de ses multiples symétries, quelle que soit la position de P, on aura toujours deux cubes de P (dont le cube P2) sur la colonne 5 ou 7 (selon que l'on place P sur l'une ou l'autre de ces deux colonnes). Pour ce qui concerne chacune des pièces A et B, il est possible d'avoir deux cubes placés sur la colonne 5 ou 7 (cubes A2 et A3 et cubes B2 et B3) ou bien de n'avoir qu'un seul cube placé sur la colonne 5 ou 7 (cube A2 ou A3 ou cube B2 ou B3). Encore mieux : il est possible de placer les pièces A et B sur la colonne 5 ou 7 en les "empilant" (exemple : cube B2 au dessus de cubes A2 et A3). De même, il est possible "d'empiler" la pièce A ou la pièce B sur la pièce P de manière à pouvoir placer le système {A; P} ou le système {B; P} sur la colonne 5 ou la colonne 7. Les empilements {A; B}, {A; P} et {B; P} sont tous les trois d'une hauteur de trois cubes (la hauteur de la figure W), ce qui entraîne qu'une fois que deux des trois pièces A, B ou P sont positionnées sur la colonne 5 ou 7, la troisième pièce est nécessairement placée sur l'autre colonne.

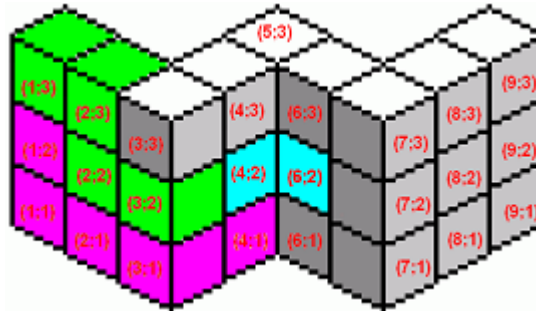
Nous allons donc nous intéresser aux placements des pièces A, B et P sur la colonne 5, sachant que la pièce Z est positionnée conformément au cas "1" présenté ci-dessus.

- Pièce P sur la colonne 5 : on a quatre positions possibles pour P.
  - **Cube P2 en position (5; 1) sur W.** Ce placement entraîne la nécessité de placer la pièce L pour combler les cubes des positions (1; 1), (2; 1), (3; 1) et (5; 1). On pourrait penser que l'on peut placer la pièce A ou la pièce B juste au dessus de P dans la colonne 5 mais nous verrons plus loin que le placement de A ou B sur cette colonne entraîne l'impossibilité de construire W. Il en découle que si P est sur la colonne 5 alors A et B sont sur la colonne 7. Ainsi, les pièces A et B occupent tous les cubes des colonnes 6, 7 et 8, à l'exception du cube (6; 1) (base de la colonne 6) qui est occupé par un des cubes de P. Il en découle que seule la pièce T va permettre de combler les cubes restants (4; 2), (3; 3), (4; 3) et (5; 3). Il ne reste donc plus que la pièce V de disponible pour combler les cubes restants de la colonne 9, ce qui est impossible puisque la pièce V n'a pas la forme d'une colonne. **Donc le**

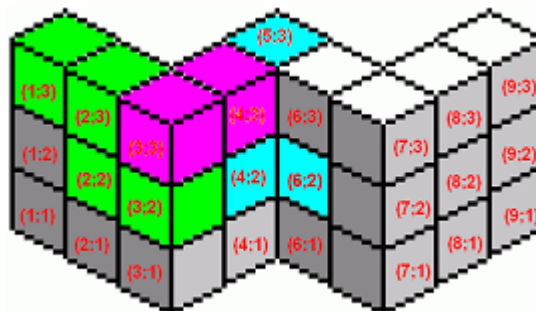
placement de P avec la pièce P2 en position (5; 1) n'est pas possible.



- **Cube P2 en position (5; 2) avec une second cube de P en position (5; 1).** Ce placement isole les positions (1; 2), (1; 1), (2; 1), (3; 1) et (4; 1). Seules les pièces L et V peuvent être placées en (1; 2), (1; 1) et (2; 1) mais dans ce deux cas, on se retrouve avec un ou deux cubes isolés qui ne peuvent être recouverts par aucune pièce du puzzle (qui ont toutes au moins trois cubes). **Donc le placement de P avec le cube P2 en position (5; 2) avec une second cube de P en position (5; 1) n'est pas possible.**



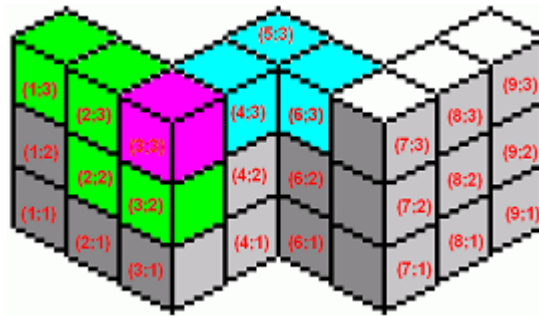
- **Cube P2 en position (5; 2) avec une second cube de P en position (5; 3).** Ce placement entraîne que les positions (3; 3) et (4; 3) sont isolées et donc ne peuvent être complétées par aucune pièce du puzzle puisqu'elles ont toutes au moins trois cubes. **Par conséquent, le placement de P avec le cube P2 en position (5; 3) n'est pas possible**



- **Cube P2 en position (5; 3).** Ce placement entraîne que les positions (4; 3) et (6; 3) sont occupées par des cubes de P. Or comme nous sommes dans le cas où la figure Z occupe les positions (1; 3) et (2; 3), il en résulte que le cube de position (3; 3) se trouve isolé et ne peut être occupé par aucune pièce du cube de Soma. **Par conséquent, le placement de P avec le cube P2 en position**

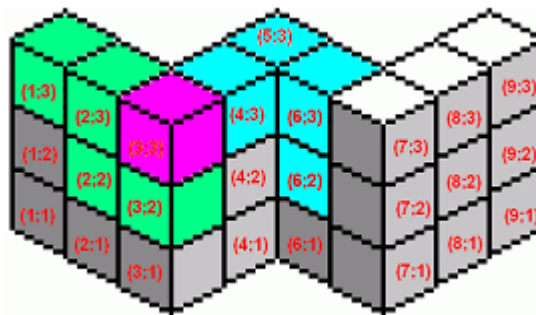


(5; 3) n'est pas possible

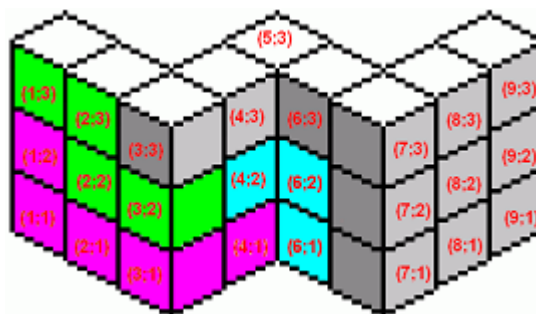


Il n'est donc pas possible de placer P sur la colonne 5.

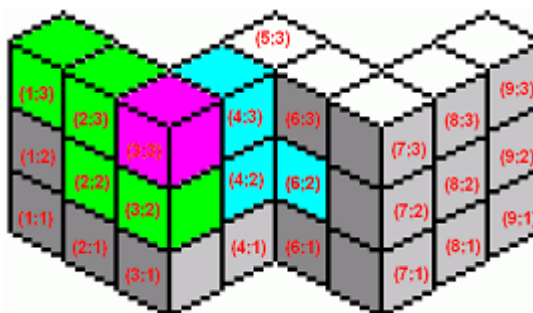
- Pièce A sur la colonne 5 (pièces B et P sur la colonne 7) : tout comme la pièce P, on doit étudier une à une les possibilités de placement de la pièce A sur la colonne 5.
  - **Cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 3) et (5; 3).** Ce placement entraîne l'isolement du cube de position (3; 3). **Donc le placement de A avec les cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 3) et (5; 3) n'est pas possible.**



- **Cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 2) et (5; 2).** Ce placement entraîne que les pièces A3 et A4 recouvrent respectivement les cubes de positions (6; 2) et (6; 1) et qu'il faut alors pouvoir recouvrir les six cubes de positions (1; 2), (1; 1), (2; 1), (3; 1), (4; 1) et (5; 1). Comme les pièces du cube du Soma ont toutes quatre faces sauf une qui en a trois, on ne peut recouvrir six cubes puisque les combinaisons de deux pièces ont sept ou huit faces. **Ainsi, le placement de la pièce A avec les cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 2) et (5; 2) n'est pas possible.**



- **Cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 3) et (4; 2).** Ce placement a pour conséquence une isolation du cube de position (3; 3), qui rend **impossible** le placement de la pièce A avec les cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 3) et (4; 2).



- **Cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 2) et (4; 1).** Ce placement entraîne tout d'abord le placement de la pièce L pour les cubes de positions (1; 2), (1; 1), (2; 1) et (3; 1). Il reste à placer les pièces B et P sur les colonnes 5 ou 7. Nous avons vu qu'il n'est pas possible de placer la pièce P sur la colonne 5 et nous je vais montrer plus loin qu'il n'est pas possible non plus de placer la pièce B sur la colonne 5. Donc les pièces B et P doivent être sur la colonne 7 sachant que le cube de position (6; 1) est pris par le cube A4 la pièce A. *Faute de temps pour pouvoir terminer ma démonstration, nous admettrons le résultat suivant : le placement de la pièce A avec les cubes A1 et A2 en positions respectives (4; 2) et (4; 1) n'es pas possible.*

**Il n'est donc pas possible de placer la pièce A sur la colonne 5.**

- Pièce B sur la colonne 5 (pièces A et P sur la colonne 7) :

*Faute de temps pour terminer ma démonstration, nous admettrons le résultat suivant : il est impossible de placer la pièces B sur la colonne 5*

Etant donné que sur les colonnes 3, 5 et 7, on ne peut placer qu'au plus deux des trois pièces A, B et P, si on ne peut pas placer une de ces trois pièces, on ne peut pas la placer sur la colonne 7 non plus puisque cette dernière est prise par les deux autres pièces. **Ainsi, le cas "1" entraîne qu'on ne peut pas placer les trois pièces A, B et P dans la figure W.**

Par symétrie, l'étude du cas "2" sur la position de Z dans la zone constituéé des colonnes 1, 2 et 3 débouche exactement sur la même conclusion (les mêmes positions de A, B et P entraînent les mêmes conséquences, à condition d'invertir les niveaux 1 et 3 dans les raisonnements ci-dessus).

Nous venons ainsi de constater que le placement de Z sur la zone constituée des colonnes 1, 2 et 3 de W rend impossible la construction de W avec les sept pièces du puzzle.

## **4.2. Zone de placements possibles de Z sur les colonnes 3, 4 et 5 de la figure W**

Il reste une dernière zone à étudier. Celle constituée par les colonnes 3, 4 et 5. Les possibilités de

placement de Z sont les suivantes :

- Cubes Z1 et Z2 en positions respectives (3; 1) et (3; 2)
- Cubes Z1 et Z2 en positions respectives (3; 3) et (3; 2)
- Cubes Z1 et Z2 en positions respectives (4; 1) et (4; 2)
- Cubes Z1 et Z2 en positions respectives (4; 3) et (4; 2)
- Cubes Z1, Z2, Z3 et Z4 en positions respectives (3; 1), (4; 1), (4; 2) et (5; 2)
- Cubes Z1, Z2, Z3 et Z4 en positions respectives (3; 2), (4; 2), (4; 1) et (5; 1)
- Cubes Z1, Z2, Z3 et Z4 en positions respectives (3; 2), (4; 2), (4; 3) et (5; 3)
- Cubes Z1, Z2, Z3 et Z4 en positions respectives (3; 3), (4; 3), (4; 2) et (5; 2)

Grâce à la symétrie par rapport au plan parallèle à la base de W et passant par la mi-hauteur de W, nous n'aurons besoin d'étudier que les cas suivants :

- Cubes Z1 et Z2 en positions respectives (3; 1) et (3; 2)
- Cubes Z1 et Z2 en positions respectives (4; 1) et (4; 2)
- Cubes Z1, Z2, Z3 et Z4 en positions respectives (3; 1), (4; 1), (4; 2) et (5; 2)
- Cubes Z1, Z2, Z3 et Z4 en positions respectives (3; 2), (4; 2), (4; 1) et (5; 1)

*Faute de temps pour terminer ma démonstration, nous admettrons le résultat suivant : **pour tout placement de Z dans la zone constituée des colonnes 3, 4 et 5, il n'est pas possible de construire la figure W. Les raisonnements auraient été très similaires à ceux du paragraphe 4.1.***

## 5. Conclusion

Nous avons énuméré tous les placement possibles de la pièce Z dans la figure W et dans tous les cas nous avons constaté que pour chacune de ces positions, il n'est pas possible de construire le reste de la figure. **Il en découle que la figure W ne peut pas être construite avec les pièces du cube de Soma.**